

**Этап №1 Методы безусловной минимизации функции многих переменных**

**Дано:**  $f(X) = 2x^2 + 2y^2 + 2x \cdot y + 20x + 10y + 10 \rightarrow \text{extr}$

**Решение:**

**а) Аналитически отыскать экстремум функции двух переменных (с использованием аппарата необходимых и достаточных условий экстремума)**

Запишем градиент функции:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x + 2y + 20 \\ 4y + 2x + 10 \end{pmatrix}$$

Запишем необходимые условия экстремума и вычислим координаты стационарных точек:

$$\begin{cases} 4x + 2y + 20 = 0 \\ 4y + 2x + 10 = 0 \end{cases} \xRightarrow[(1)-2 \cdot (2)]{(1)} \begin{cases} 4x + 2y + 20 = 0 \\ -6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 20 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$$

Получена стационарная точка функции  $X^* = (-5, 0)$

Составим матрицу Гессе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 4; & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 2; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 4; \end{aligned} \Rightarrow H(X) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычислим матрицу Гессе в полученной стационарной точке:

$$H(X^*) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Определим характер полученной стационарной точки, используя критерий Сильвестра:

$$\Delta_1 = 4 > 0$$

$$\Delta_2 = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 12 > 0$$

Так как все диагональные миноры матрицы положительны, матрица Гессе является положительно-определенной, и, следовательно, точка  $X^* = (-5, 0)$  является точкой локального минимума функции.

**б) Сделать три итерации методом градиентного спуска из начальной точки  $X^0 = (0, 0)$  в направлении экстремума**

**Внимание !**

Для пунктов б)-д): если при аналитическом решении задачи найден локальный максимум функций, то для численного решения задачи необходимо умножить исходную функцию на (-1) и перейти к задаче поиска минимума, при этом нужно пересчитать градиент и матрицу Гессе для новой функции. В результирующих таблицах значение функции нужно умножить на (-1).

Итерация 0

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(X^0) = 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 10 = 10$$

$$\nabla f(X^0) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 20 \\ 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\|\nabla f(X^0)\| = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22.3607$$

Итерация 1

Вычислим точку  $X^1$  по формуле:  $X^1 = X^0 - t_0 \nabla f(X^0)$ . Зададим шаг  $t_0 = 0.1$

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.1 \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(X^1) = 2 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-2) \cdot (-1) + 20 \cdot (-2) + 10 \cdot (-1) + 10 = -26$$

$f(X^1) < f(X^0)$ , следовательно, шаг выбран удачно

$$\nabla f(X^1) = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 20 \\ 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\|\nabla f(X^1)\| = \sqrt{10^2 + 2^2} = 10.1980$$

Итерация 2

Вычислим точку  $X^2$  по формуле:  $X^2 = X^1 - t_1 \nabla f(X^1)$ . Зададим шаг  $t_1 = 0.1$

$$X^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} - 0.1 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1.2 \end{pmatrix}$$

$$f(X^2) = 2 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-1.2)^2 + 2 \cdot (-3) \cdot (-1.2) + 20 \cdot (-3) + 10 \cdot (-1.2) + 10 = -33.92$$

$f(X^2) < f(X^1)$ , следовательно, шаг выбран удачно

$$\nabla f(X^2) = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1.2) + 20 \\ 4 \cdot (-1.2) + 2 \cdot (-3) + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.6 \\ -0.8 \end{pmatrix}$$

$$\|\nabla f(X^2)\| = \sqrt{5.6^2 + (-0.8)^2} = 5.6569$$

### Итерация 3

Вычислим точку  $X^3$  по формуле:  $X^3 = X^2 - t_2 \nabla f(X^2)$ . Зададим шаг  $t_2 = 0.1$

$$X^3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1.2 \end{pmatrix} - 0.1 \cdot \begin{pmatrix} 5.6 \\ -0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.56 \\ -1.12 \end{pmatrix}$$

$$f(X^3) = 2 \cdot (-3.56)^2 + 2 \cdot (-1.12)^2 + 2 \cdot (-3.56) \cdot (-1.12) + 20 \cdot (-3.56) + 10 \cdot (-1.12) + 10 = -36.5696$$

$f(X^3) < f(X^2)$ , следовательно, шаг выбран удачно

$$\nabla f(X^3) = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-3.56) + 2 \cdot (-1.12) + 20 \\ 4 \cdot (-1.12) + 2 \cdot (-3.56) + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.52 \\ -1.6 \end{pmatrix}$$

$$\|\nabla f(X^3)\| = \sqrt{3.52^2 + (-1.6)^2} = 3.8666$$

Приведенные вычисления представим в виде таблицы

№	x	y	t	$\nabla_x$	$\nabla_y$	f	$\ \nabla f(X)\ $
0	0	0	-	20	10	10	22.3607
1	-2	-1	0.1	10	2	-26	10.198
2	-3	-1.2	0.1	5.6	-0.8	-33.92	5.6569
3	-3.56	-1.12	0.1	3.52	-1.6	-36.5696	3.8666

**в) Сделать одну итерацию методом наискорейшего спуска из начальной точки  $X^0 = (0, 0)$  в направлении экстремума**

Итерация 0. Итерация 0 совпадает с 0-й итерацией метода градиентного спуска.

### Итерация 1

Вычислим точку  $X^1$  по формуле:  $X^1 = X^0 - t_0 \nabla f(X^0)$ .

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - t_0 \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \cdot t_0 \\ -10 \cdot t_0 \end{pmatrix}$$

Вычислим шаг  $t_0$ :

$$f(X^1) = 2 \cdot (-20 \cdot t_0)^2 + 2 \cdot (-10 \cdot t_0)^2 + 2 \cdot (-20 \cdot t_0) \cdot (-10 \cdot t_0) + 20 \cdot (-20 \cdot t_0) + 10 \cdot (-10 \cdot t_0) + 10 =$$

$$= 800 \cdot t_0^2 + 200 \cdot t_0^2 + 400 \cdot t_0^2 - 400 \cdot t_0 - 100 \cdot t_0 + 10 =$$

$$= 1400 \cdot t_0^2 - 500 \cdot t_0 + 10$$

$$\frac{df(X^1)}{dt_0} = 2800 \cdot t_0 - 500 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{500}{2800} = 0.17857$$

$$X^1 = \begin{pmatrix} -20 \cdot 0.17857 \\ -10 \cdot 0.17857 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.5714 \\ -1.7857 \end{pmatrix}$$

$$f(X^1) = 1400 \cdot 0.17857^2 - 500 \cdot 0.17857 + 10 = -34.6429$$

$$\nabla f(X^1) = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-3.5714) + 2 \cdot (-1.7857) + 20 \\ 4 \cdot (-1.7857) + 2 \cdot (-3.5714) + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1429 \\ -4.2857 \end{pmatrix}$$

$$\|\nabla f(X^1)\| = \sqrt{2.1429^2 + (-4.2857)^2} = 4.7916$$

Приведенные вычисления представим в виде таблицы

№	x	y	t	$\nabla_x$	$\nabla_y$	f	$\ \nabla f(X)\ $
0	0	0	-	20	10	10	22.3607
1	-3.5714	-1.7857	0.17857	2.1429	-4.2857	-34.6429	4.7916

**г) Сделать две итерации методом сопряженных градиентов из начальной точки  $X^0 = (0, 0)$  в направлении экстремума**

Итерация 0. Итерация 0 совпадает с 0-й итерацией метода градиентного спуска.

Итерация 1. Итерация 1 совпадает с 1-й итерацией метода наискорейшего спуска.

Итерация 2

Вычислим точку  $X^2$  по формулам:

$$X^2 = X^1 + t_1 d^1$$

$$d^1 = -\nabla f(X^1) + \beta_0 d^0, \quad d^0 = -\nabla f(X^0)$$

$$\beta_0 = \frac{\|\nabla f(X^1)\|^2}{\|\nabla f(X^0)\|^2}$$

$$\beta_0 = \frac{4.7916^2}{22.3607^2} = 0.04592$$

$$d^1 = -\begin{pmatrix} 2.1429 \\ -4.2857 \end{pmatrix} + 0.04592 \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.0612 \\ 3.8265 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} -3.5714 \\ -1.7857 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -3.0612 \\ 3.8265 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.5714 - 3.0612 \cdot t_1 \\ -1.7857 + 3.8265 \cdot t_1 \end{pmatrix}$$

Вычислим шаг  $t_1$ :

$$\begin{aligned} f(X^2) &= 2 \cdot (-3.5714 - 3.0612 \cdot t_1)^2 + 2 \cdot (-1.7857 + 3.8265 \cdot t_1)^2 + \\ &+ 2 \cdot (-3.5714 - 3.0612 \cdot t_1) \cdot (-1.7857 + 3.8265 \cdot t_1) + \\ &+ 20 \cdot (-3.5714 - 3.0612 \cdot t_1) + 10 \cdot (-1.7857 + 3.8265 \cdot t_1) + 10 = \\ &= 2 \cdot (12.7548 + 21.8655 \cdot t_1 + 9.3709 \cdot t_1^2) + 2 \cdot (3.1887 - 13.6659 \cdot t_1 + 14.6421 \cdot t_1^2) + \\ &+ 2 \cdot (6.3774 - 13.6659 \cdot t_1 + 5.4663 \cdot t_1 - 11.7136 \cdot t_1^2) - \\ &- 71.428 - 61.224 \cdot t_1 - 17.857 + 38.265 \cdot t_1 + 10 = \\ &= 25.5096 + 43.731 \cdot t_1 + 18.7418 \cdot t_1^2 + 6.3774 - 27.3318 \cdot t_1 + 29.2842 \cdot t_1^2 + \\ &+ 12.7548 - 16.3992 \cdot t_1 - 23.4272 \cdot t_1^2 - 71.428 - 61.224 \cdot t_1 - 17.857 + 38.265 \cdot t_1 + 10 = \\ &= 24.5988 \cdot t_1^2 - 22.959 \cdot t_1 - 34.6432 \end{aligned}$$

$$\frac{df(X^2)}{dt_1} = 49.1976 \cdot t_1 - 22.959 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{22.959}{49.1976} = 0.46666$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} -3.5714 - 3.0612 \cdot 0.46666 \\ -1.7857 + 3.8265 \cdot 0.46666 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.99993 \\ -0.00003 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(X^2) = 24.5988 \cdot 0.46666^2 - 22.959 \cdot 0.46666 - 34.6432 = -40.00032 \approx -40$$

$$\nabla f(X^2) = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-4.99993) + 2 \cdot (-0.00003) + 20 \\ 4 \cdot (-0.00003) + 2 \cdot (-4.99993) + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00002 \\ 0.00002 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\nabla f(X^2)\| = \sqrt{0.00002^2 + 0.00002^2} = 0.00002 \approx 0$$

Т.к. в точке  $X^2$  градиент функции  $\nabla f(X^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , то  $X^2$ -стационарная точка функции !

Приведенные вычисления представим в виде таблицы

№							
0	x	y	t	$\nabla_x$	$\nabla_y$	f	$\ \nabla f(X)\ $
	0	0	-	20	10	10	22.3607
			$\beta$	$d_x$	$d_y$		
			-	-20	-10		
1	x	y	t	$\nabla_x$	$\nabla_y$	f	$\ \nabla f(X)\ $
	-3.5714	-1.7857	0.17857	2.1429	-4.2857	-34.6429	4.7916
			$\beta$	$d_x$	$d_y$		
			0.04592	-3.0612	3.8265		
2	x	y	t	$\nabla_x$	$\nabla_y$	f	$\ \nabla f(X)\ $
	-5	0	0.46666	0	0	-40	0

**д) Сделать одну итерацию методом Ньютона из начальной точки  $X^0 = (0, 0)$  в направлении экстремума**

Итерация 0. Итерация 0 совпадает с 0-й итерацией метода градиентного спуска.

Итерация 1

Вычислим точку  $X^1$  по формуле:  $X^1 = X^0 - H^{-1}(X^0)\nabla f(X^0)$

Вычислим матрицу обратную к матрице Гессе, вычисленной в точке  $X^0$ :

$$H(X^0) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow H^{-1}(X^0) = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow H^{-1}(X^0) = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20/3 - 10/6 \\ -20/6 + 10/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(X^1) = 2 \cdot (-5)^2 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-5) \cdot 0 + 20 \cdot (-5) + 10 \cdot 0 + 10 = -40$$

$$\nabla f(X^1) = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-5) + 2 \cdot 0 + 20 \\ 4 \cdot 0 + 2 \cdot (-5) + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\nabla f(X^1)\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

Т.к. в точке  $X^1$  градиент функции  $\nabla f(X^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , то  $X^1$ -стационарная точка функции !

Приведенные вычисления представим в виде таблицы

№	x	y	$\nabla_x$	$\nabla_y$	f	$\ \nabla f(X)\ $
0	0	0	20	10	10	22.3607
1	-5	0	0	0	-40	0